問 題 紙

1 空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1) B の中心と l との距離を求めよ。

(2) l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

2 実数 t に対して 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える。t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。

3 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ を次のように定める。

- C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する。
- 正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

(2) すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α, β, s, t の値を一組与えよ。

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ。

4 負でない整数 N が与えられたとき，$a_1 = N$，$a_{n+1} = \left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。ただし $[\,a\,]$ は，実数 a の整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す。

(1) $a_3 = 1$ となるような N をすべて求めよ。

(2) $0 \leqq N < 2^{10}$ をみたす整数 N のうちで，N から定まる数列 $\{a_n\}$ のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。

(3) 0 から $2^{100} - 1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び，数列 $\{a_n\}$ を定める。次の条件（$*$）をみたす最小の正の整数 m を求めよ。

（$*$）数列 $\{a_n\}$ のある項が m となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる。