

問 題 紙

1

次の問に答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = x^{-2}2^x$ ($x \neq 0$) について、 $f'(x) > 0$ となるための x に関する条件を求めよ。
- (2) 方程式 $2^x = x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。
- (3) 方程式 $2^x = x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。

2

次の問に答えよ。

(1)

$$\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

とすると、整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち、 x^4 の係数が 1 であるものを求めよ。

(2) 8 つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

(ただし、複合士はすべての可能性にわたる) の中で、(1) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求め、それ以外のものが解でないことを示せ。

(3) (2) で求めた $f(x) = 0$ の解の大小関係を調べ、それらを大きい順に並べよ。

3

e を自然対数の底とし、 t を $t > e$ となる実数とする。このとき、曲線 $C: y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる 2 点で交わるので、交点のうち x 座標が小さいものを P 、大きいものを Q とし、 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とする。また、 P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし、

- 曲線 C 、 x 軸および 2 つの直線 $x = \alpha$ 、 $x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1 、
- 曲線 C および 2 つの直線 PR 、 QR で囲まれる部分の面積を S_2

とする。このとき、次の問に答えよ。

(1) $\frac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ。

(2) $\alpha < \frac{e}{t}$ 、 $\beta < 2 \log t$ となることを示し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。必要ならば、 $x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい。

4

数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき、

- 石が点 1 にあるならば、確率 1 で点 2 に移動する。
- 石が点 k ($k = 2, 3, 4$) にあるならば、確率 $\frac{1}{2}$ で点 $k-1$ に、確率 $\frac{1}{2}$ で点 $k+1$ に移動する。
- 石が点 5 にあるならば、確率 1 で点 4 に移動する。

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め、この試行を繰り返す。また、石が移動した先の点に印をつけていく (点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 試行を 6 回繰り返した後に、石が点 k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) にある確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 試行を 6 回繰り返した後に、5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回 ($n \geq 1$) 繰り返した後に、ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。