問 題 紙

1 曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $A(-2,4)$、$B(b,b^2)$ をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件：$y=x^2$ 上の点 $T(t,t^2)$ $(-2<t<b)$ で，$\angle ATB$ が直角になるものが存在する。

2 2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を $O(0,0)$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2) (1) でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，$\triangle OPQ$ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，$\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。ただし，(2)，(3) においては，3 点 O,P,Q が同一直線上にあるときは，$\triangle OPQ$ の面積は 0 であるとする。

3 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $k=0,1,2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2) $k=0,1,2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

4 次の問に答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1) 次の条件（＊）を満たす整数 a,b,c,d,e,f の組をすべて求めよ。

$$(\ast)\begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の 2 つの解が } c,d \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+d=0 \text{ の 2 つの解が } e,f \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の 2 つの解が } a,b \text{ である。} \end{cases}$$

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は、次の条件（＊＊）を満たすとする。

（＊＊）すべての正の整数 n について，a_n, b_n は整数であり，2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}, b_{n+1} である。

このとき，

(i) 正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\ldots$ となるものが存在することを示せ。

(ii) 条件（＊＊）を満たす数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の組をすべて求めよ。