

問 題 紙

1

a を正の定数とする。2 次関数 $f(x) = ax^2$ と 3 次関数 $g(x) = x(x-4)^2$ について、次の問に答えよ。

- (1) 関数 $y = g(x)$ について、極値を求め、そのグラフを描け。
- (2) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。
- (3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき、2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。

2

下図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると、時刻 $n+1$ では、それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D、E、G のいずれかにいる。自然数 $n \geq 41$ に対して、

- (i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 B、D、E のいずれかにいる確率を p_n 、
- (ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 C、F、H のいずれかにいる確率を q_n 、
- (iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n 、

とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) p_2, q_2, r_2 および p_3, q_3, r_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 42$ のとき、 p_n, q_n, r_n を求めよ。
- (3) 自然数 $m \geq 41$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

3

次の問に答えよ。

- (1) 次の条件 (*) を満たす 3 つの自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。(*) $a < b < c$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ である。
- (2) 偶数 $2n$ ($n \geq 41$) の 3 つの正の約数 p, q, r で、 $p > q > r$ と $p + q + r = n$ を満たす組 (p, q, r) の個数を $f(n)$ とする。ただし、条件を満たす組が存在しない場合は、 $f(n) = 0$ とする。 n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ。また、 $f(n) = M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ。