

問 題 紙

1 不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して、曲線 $C: y = a - 1 - \log x (x > 0)$ を考える。 s を正の実数とし、曲線 C 上の点 $P(s, a - 1 - \log s)$ における接線が x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s), 0), (0, v(s))$ とする。このとき、次の問に答えよ。必要があれば、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を証明なしで使ってよい。

- (1) 関数 $u(s), v(s)$ を s の式で表せ。
- (2) 関数 $t = u(s), t = v(s)$ の 2 つのグラフを、増減・凹凸および交点の座標に注意して、同じ st 平面上に図示せよ。
- (3) 関数 $t = u(s), t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

2 下図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると、時刻 $n+1$ では、それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる。自然数 $n \geq 1$ に対して、

- (i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n ,
- (ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n ,
- (iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n ,

とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) p_2, q_2, r_2 および p_3, q_3, r_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 p_n, q_n, r_n を求めよ。
- (3) 自然数 $m \geq 1$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。
- (4) 自然数 $m \geq 2$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき、 $t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。

3 xyz 空間の 2 点 $A(0, 0, 2), P(a, b, 0)$ を通る直線を l とする。また、点 $(2, 0, 0)$ を中心とし、半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し、 S のうち z 座標が $z > 0$ を満たす部分を T とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ で定めるとき、点 Q の座標を a, b, t を使って表せ。
- (2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。
- (3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。

4 n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (I)、(II)、(III) を満たしている。

- (I) 集合 M は n 個の要素からなる。
- (II) 集合 M の要素 z に対して、 $\frac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。
- (III) 集合 M の要素 z, w に対して、その積 zw は集合 M の要素である。ただし、 $z = w$ の場合も含める。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。
- (2) n は偶数であることを示せ。
- (3) $n = 4$ のとき、集合 M は一通りに定まることを示し、その要素をすべて求めよ。

(4) $n = 6$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。