

## 問 題 紙

**1** 自然数  $n$  に対し、定積分  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$  を考える。このとき、次の間に答えよ。

- (1)  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$  を示せ。
- (2)  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  を示せ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$  を求めよ。
- (4)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$  とする。このとき (1), (2) を用いて  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

**2**  $a$  を 1 より大きい実数とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) 関数  $y = a^x$  と  $y = \log_a x$  のグラフの共有点は、存在すれば直線  $y = x$  上にあることを示せ。
- (2) 関数  $y = a^x$  と  $y = \log_a x$  のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。
- (3) 関数  $y = a^x$  と  $y = \log_a x$  のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と  $a$  の値を求めよ。

**3**  $p$  を素数、 $a, b$  を整数とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1)  $(a+b)^p - a^p - b^p$  は  $p$  で割り切れることを示せ。
- (2)  $(a+2)^p - a^p$  は偶数であることを示せ。
- (3)  $(a+2)^p - a^p$  を  $2p$  で割ったときの余りを求めよ。

**4** 図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則 (a), (b) に従って移動する。

- (a) 時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に、点 Q は頂点 C にいる。
- (b) 点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

時刻  $n$  まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいたことが一度もない確率を  $p_n$  と表す。また時刻  $n$  まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいたことが一度もなく、かつ時刻  $n$  に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を  $a_n$  と表し、 $b_n = p_n - a_n$  と定める。このとき、次の間に答えよ。

- (1) 時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を、図 2 にならってすべて図示せよ。
- (2)  $a_1, b_1, a_2, b_2$  を求めよ。
- (3)  $a_{n+1}, b_{n+1}$  を  $a_n, b_n$  で表せ。
- (4)  $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$  を示せ。