問 題 紙

1 正の整数 n に対し $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$ とする。

(1) I_1 を求めよ。必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2) $n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。D を底面とし，点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を C とする。C を平面 $x = \dfrac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

2 空間内に $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B，C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B’，C’ とする。

(1) $AB' \cdot AC' + B'B \cdot C'C = 0$ を示せ。

(2) $\angle B'AC' > \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) P 上の三角形 AB’C’ の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。

3 正の整数 n の正の平方根、$\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1) このような n の中で最小のものを求めよ。

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

4 正の整数 n に対して $1, 2, \cdots, n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ とする。この $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対し、各添字 $i = 1, 2, \cdots, n$ について、a_i の値が j であるとき、その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \to a_j = k$ と書くことにする。ここで $a_i = j \to a_j = k \to a_k = l \to \cdots$ のようにたどり、それを続けていく。例えば $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 5, 6, 1, 4, 3, 7)$ のとき、

(i) $a_1 = 2 \to a_2 = 5 \to a_5 = 4 \to a_4 = 1 \to a_1 = 2$

(ii) $a_3 = 6 \to a_6 = 3 \to a_3 = 6$

(iii) $a_7 = 7 \to a_7 = 7$

となり、どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル、列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の (i), (ii), (iii) は長さがそれぞれ $4, 2, 1$ のサイクルになっている。

(1) $n = 3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2) $n = 4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3) n 以下の正の整数 k に対して $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$ を示せ。

(4) n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ。