問 題 紙

1 a を実数として $f(x)=2x^2-2ax-a^2$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解が、必ず $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたすための a の条件を求めよ。

(2) (1) で求めた条件をみたす a に対して

$$S(a)=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$$

とおく。$S(a)$ の値を求めよ。

(3) $S(a)$ の値が最小となる a を求めよ。

2

(1) 平面上に $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OR}|=1$ をみたす相異なる 4 点 O, P, Q, R がある。このとき $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}|=0$ ならば，三角形 PQR は正三角形であることを示せ。

(2) 空間内に $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=1$ をみたす相異なる 5 点 O, A, B, C, D がある。また O から A, B, C を含む平面におろした垂線の足を H とする。このとき，以下の 2 つの命題を示せ。

命題 (i) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=3|\overrightarrow{OH}|$ ならば，三角形 ABC は正三角形である。

命題 (ii) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|=0$ かつ $|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{1}{3}$ ならば，四面体 ABCD は正四面体である。

3

(1) 平面において x, y がともに整数となる点 (x,y) を格子点という。正の整数 n に対して

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x+y \leqq n$$

で定まる領域を D とする。4 つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり、x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする。また、そのなかで特に 1 つの辺が x 軸上にある長方形の数を $S(n)$ とする。以下の問に答えよ。

(a) $R(3)$ と $R(4)$ を求めよ。

(b) $S(n)$ を求めよ。

(c) $R(n)$ を求めよ。

(d) $R(n)=1001$ となる n を求めよ。