

問 題 紙

1 実数係数の4次方程式 $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ は相異なる複素数 $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ を解に持ち、それらは全て複素数平面において、点1を中心とする半径1の円周上にあるとする。ただし、 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ はそれぞれ α, β と共役な複素数を表す。

- (1) $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}$ を示せ。
- (2) $t = \alpha + \bar{\alpha}, u = \beta + \bar{\beta}$ とおく。 p, q, r, s をそれぞれ t と u で表せ。
- (3) 座標平面において、点 (t, u) のとりうる範囲を図示せよ。

2 $0 < b < a$ とする。 xy 平面において、原点を中心とする半径 r の円 C と点 $(a, 0)$ を中心とする半径 b の円 D が2点で交わっている。

- (1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ。
- (2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする。 P の x 座標 $h(r)$ を求めよ。
- (3) 点 $(r, 0)$ と点 $R(a - b, 0)$ をとる。 D の内部にある C の弧 PQ 、線分 QR 、および線分 RP で囲まれる図形を A とする。 xy 空間において A を x 軸の周りに1回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ。ただし、答えに $h(r)$ を用いてもよい。
- (4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ。また、その r を $r(a)$ とおいたとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} (r(a) - a)$ を求めよ。

3

- (1) 方程式 $e^x = \frac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ。
- (2) $y = x(x^2 - 3)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点の個数を求めよ。
- (3) a を正の実数とし、関数 $f(x) = x(x^2 - a)$ を考える。 $y = f(x)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点は1個のみであるとする。このような a がただ1つ存在することを示せ。

4 n を正の整数とし、 n 次の整式 $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して $P_n(x) = \sum_{m=1}^n B_m x^m$ と表す。

- (1) 等式 $\sum_{m=1}^n {}_n B_m = n!$ を示せ。
- (2) 等式

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^n ({}_n B_m \cdot {}_m C_0 + {}_n B_m \cdot {}_m C_1 x + \cdots + {}_n B_m \cdot {}_m C_m x^m)$$

を示せ。ただし、 ${}_m C_0, {}_m C_1, \dots, {}_m C_m$ は二項係数である。

- (3) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して、等式 $\sum_{j=k}^n {}_n B_j \cdot {}_j C_k = {}_{n+1} B_{k+1}$ を示せ。