問 題 紙

1 関数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) x 軸上の点 $P(t,0)$ から C にちょうど 2 本の接線を引くことができるとする。そのような実数 t の値の範囲を求めよ。

(3) (2) において，C の 2 つの接点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とする。$\alpha,\ \beta$ がともに整数であるような組 (α,β) をすべて求めよ。

2 c を 1 より大きい実数とする。また，i を虚数単位として，$a=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく。複素数 z に対して，

$$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c,\quad Q(z)=-a^7z^3+3a^6z^2+(c+2)az-c$$

と定める。

(1) 方程式 $P(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ。

(2) 方程式 $Q(z)=0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ。

(3) 複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z)=0,\ Q(z)=0$ が共通解 β を持つとする。そのときの c の値と β を求めよ。

3 座標空間の 3 点 $A(3,1,3),\ B(4,2,2),\ C(4,0,1)$ の定める平面を H とする。また，

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\quad (s,t\ \text{は非負の実数})$$

を満たすすべての点 P からなる領域を K とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

(2) 原点 $O(0,0,0)$ から平面 H に下ろした垂線の足を Q とする。$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(3) 領域 K 上の点 P に対して，線分 OP 上の点で $\overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$（$r$ は非負の実数）を満たす点 R が存在することを示せ。

(4) 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ。

4 袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を p $(0\leqq p\leqq 1)$ とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく。

(1) $n\geqq 2$ に対して，$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ。

(2) $k=1,2,\ldots,n$ に対して，等式

$$f(k)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx$$

を示せ。

(3) 自然数 k に対して，定積分

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx$$

を求めよ。