問 題 紙

1 以下の問に答えよ。

(1) 実数 x を変数とする関数 $f(x)$ が導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち，すべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすとする。さらに以下の極限値 $a, b(a < b)$ が存在すると仮定する。

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = b$$

このとき，$a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し，関数 $g(x) = cx - f(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在することを示せ。

(2) 実数 x を変数とする関数 $f(x) = \log\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ はすべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ。また，この f に対し小問 (1) の極限値 a, b を求めよ。

(3) 小問 (2) の関数 f および極限値 a, b を考える。$a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し小問 (1) の x_0 および $g(x_0)$ を c を用いて表せ。

2 整数 a, b, c に対し次の条件を考える。

(∗) $a \geqq b \geqq 0$ かつ $a^2 - b^2 = c$

以下の問に答えよ。

(1) $c = 24, 25, 26$ それぞれの場合に条件 (∗) をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

(2) p は 3 以上の素数，n は正の整数，$c = 4p^{2n}$ とする。このとき，条件 (∗) をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

3 以下の問に答えよ。

(1) 実数 r, α は $0 < r \leqq 1, 0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする。xy 平面内で，点 $(1, 0)$ を中心にもつ半径 r の円周およびその内部を C とする。C を原点 $(0, 0)$ を中心に反時計まわりに角度 α だけ回転させるとき，C が通過する領域の面積を求めよ。

(2) 実数 R, α は $0 < R \leqq 1, 0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする。xyz 空間内で，点 $(1, 0, 0)$ を中心にもつ半径 R の球面およびその内部を B とする。B を z 軸のまわりに角度 α だけ回転させるとき，B が通過する領域の体積を求めよ。ただし，回転の向きは回転後の B の中心が $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ になるように選ぶものとする。

4 コイン①，⋯，⑥が下図のようにマス目の中に置かれている。

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び，選んだコインはそのままにし，そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える。例えば，①を選べば，②，③を裏返し，④を選べば，⑤，⑥を裏返す。最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする。正の整数 n に対し，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき，以下の問に答えよ。

(1) p_2 を求めよ。

(2) コイン①，⋯，⑥をグループ A，B に分けることによって，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる。

n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ，B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる。

どのようにグループ分けすればよいかを答えよ。

(3) p_4 を求めよ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって

利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不　等　式)

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$,　$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$,　$(a, b, c$ は正または $0)$

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

(三　角　形)

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,　$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

(図　形　と　式)

6. 数直線上の 2 点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$,　$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$,　$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

(ベ　ク　ト　ル)

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

極形式

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad (r = |z|, \theta = \arg z)$

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対し，$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

解と係数の関係

14. $x^2 + px + q = 0$ の解が α, β のとき，$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = q$

15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α, β, γ のとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \quad \alpha\beta\gamma = -r$

対数

16. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

三角関数

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

20. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$
$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$
$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$
$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$