

1 定数 p, q, r は $p > q > r$ をみたしている. 3 次方程式

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

の解は, 連続する 3 つの整数 $n-1, n, n+1$ であるとする. このとき, n の値と p, q, r を定めよ.

2

平面上において、点 O を始点とする 2 つの半直線を l_1, l_2 とし、それらのなす角は鋭角 $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。点 A は l_1 上の点で $OA = 1$ ，点 B は l_2 上の点で $OB = b$ とする。次に、直線 AB 上に点 O からおろした垂線と直線 AB の交点を P とする。

- (1) ベクトル $OA \rightarrow OB$ によりベクトル OP を $OP \rightarrow t OA + (1 - t) OB$ とするとき、 t を b と θ を用いて表せ。
- (2) θ を固定し、 b を $b > 0$ の範囲で動かすとき、点 P が l_1, l_2 ではさまれる部分（ただし l_1, l_2 も含む）にあるための b の範囲を求めよ。
- (3) b が (2) で求めた範囲で動くとき、点 P の描く軌跡と l_1, l_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

3 n を 3 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの数字が書かれたカードがおのおの 1 枚ずつ、全部で $2n$ 枚ある。数字 m が書かれたカードを $\boxed{m}$ で表すとする。この $2n$ 枚のカードを横一列に並べる。

このとき、 $\boxed{m}$ が極大であるとは、その両隣のカードが m より小さいことをいう。ただし、 $\boxed{m}$ が列の左端にあるときには、その右隣のカードの数字が m より小さいことをいい、 $\boxed{m}$ が列の右端にあるときには、その左隣のカードの数字が m より小さいことをいう。

- (1) $\boxed{2n}$ のみが極大である並べ方は何通りか。
- (2) $\boxed{n}$ と $\boxed{2n}$ のみが極大である並べ方のうち、これら 2 枚には含まれたカードの数字の中で最小のものが k となる並べ方は何通りか、 n と k を用いて表せ。
- (3) $\boxed{n}$ と $\boxed{2n}$ のみが極大であるカードの並べ方の総数を $P(n)$ とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{a^n}$$

が 0 でない数に収束するような定数 a の値と、そのときの極限値を求めよ。

4

π を円周率とする。次の積分について考える。

$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin ntdt$$

$$I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \sin ntdt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) n が自然数であるとき、不等式

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0)$$

が成立することを数学的帰納法により示せ。これを用いて、不等式

$$I_0 + uI_1 + u^2I_2 + \cdots + u^nI_n < \pi e^{\pi u} \quad (u > 0)$$

が成立することを示せ。

(2) I_0, I_1 の値を求めよ。また、漸化式

$$I_{n+1} = \frac{4n+2}{\pi} I_n - I_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成立することを示せ。

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう。 π が無理数でないとし、正の整数 p, q によって $\pi = \frac{p}{q}$ として表されると仮定する。 $A_0 = I_0, A_n = p^n I_n$ とおくとき、 $A_0, A_1, A_2, \dots$ は正の整数になることを示せ。さらに、これから矛盾を導け。