$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の文章を読み，後の問いに答えよ．

恒等式 $(x+1)^2-x^2=2x+1$ において

$$x=1 \quad \text{とおくと} \quad 2^2-1^2=2\times 1+1$$

$$x=2 \quad \text{とおくと} \quad 3^2-2^2=2\times 2+1$$

$$x=3 \quad \text{とおくと} \quad 4^2-3^2=2\times 3+1$$

$$\therefore x=n \quad \text{とおくと} \quad (n+1)^2-n^2=2\times n+1$$

となる．これらの式を加えると

$$(n+1)^2-1^2=2\times(1+2+3+\cdots+n)+n\times 1$$

が得られる．よって

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}\left\{(n+1)^2-1^2-n\times 1\right\}=\frac{n(n+1)}{2}$$

(1) 上と同様の方法により，恒等式

$$(x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1$$

を用いて和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ を求めよ．

(2) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^5$ が n について 6 次式で表されることを示し，6 次の項の係数と 5 次の項の係数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 双曲線 $x^2 - y^2 = a^2$ （$a > 0$）上の点 $P(s, t)$ （$s > 0$，$t > 0$）における法線 m が，双曲線 $y^2 - x^2 = b^2$ （$b > 0$）に点 Q で接するとする。

(1) s^2，t^2 を a，b で表せ。

(2) $\dfrac{OQ}{OP}$ を a，b で表せ。また $\angle POQ$ を求めよ。ただし O は xy 平面の原点とする。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数

$$f(x) = -x^2 \log x \quad (x > 0)$$

を考える．ただし対数は自然対数とする．

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線が原点を通るとき，接線の方程式および接点の座標を求めよ．

(2) p を (1) で求めた接線の傾きとするとき，$x > 0$ において

$$-x \log x \leqq p$$

が成り立つことを示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．

(4) 積分

$$S(b) = \int_b^1 \left| f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right| dx \quad (0 < b \leqq 1)$$

を考える．このとき $\displaystyle\lim_{b \to 0} S(b)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ xyz 空間内の 6 点

$$P_1(0\,,\,0\,,\,0)\,,\ \ P_2(1\,,\,0\,,\,0)\,,\ \ P_3\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,0\right)\,,$$

$$Q_1(0\,,\,0\,,\,1)\,,\ \ Q_2(1\,,\,0\,,\,1)\,,\ \ Q_3\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,1\right)$$

を考える。今、点 P が時刻 0 に P_1 を出発して正三角形 $P_1P_2P_3$ の周上を一定の速さ 1 で進み，P_2，P_3 を回って P_1 に戻ってくる。また、点 Q が時刻 0 に Q_2 を出発して正三角形 $Q_2Q_3Q_1$ の周上を P と同じ速さで進み，Q_3，Q_1 を回って Q_2 に戻ってくる。このとき線分 PQ が動くことによってできる面と三角形 $P_1P_2P_3$，三角形 $Q_2Q_3Q_1$ で囲まれる立体を K とする。

(1) $0 \leqq a \leqq 1$ とする。時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における線分 PQ と平面 $z = a$ の交点の座標を求めよ。

(2) 平面 $z = a$ $(0 \leqq a \leqq 1)$ による K の切り口の面積を求めよ。

(3) K の体積を求めよ。