

1 関数 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ とおく。直線 $y = mx$ が曲線 $y = f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。

(配点率 20 %)

2 正の整数 n に対して

$$S(n) = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}, \quad T(n) = \sum_{q=1}^n \frac{1}{n+q}$$

とおく。等式 $S(n) = T(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示せ。

(配点率 20 %)

3

空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$AB = 1, \quad AC = 2, \quad AD = 3$$

$$\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ, \quad \angle DAB = 90^\circ$$

をみたしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。

(配点率 20 %)

4

θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = 1 - t^2 + t \sin \theta \end{cases}$$

で与えられるような動点 $P(x, y)$ を考える。 t が実数全体を動くとき、点 P が描く曲線を C とする。 C が x 軸の $x \geq 0$ の部分と交わる点を Q とする。

以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 Q の x 座標を求めよ。
- (2) θ が変化すると曲線 C も変化する。 θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき、 C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。
- (3) θ が変化すると点 Q も変化する。 Q の x 座標が最大となるような θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) について $\tan \theta$ の値を求めよ。

(配点率 20 %)

5

n を正の整数、 a を正の実数とする。曲線 $y = x^n$ と曲線 $y = a \log x$ が、点 P で共通の接線をもつとする。ただし、対数は自然対数である。点 P の x 座標を t とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a 、 t をそれぞれ n を用いて表せ。
- (2) 曲線 $y = x^n$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする。また、曲線 $y = a \log x$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ。
- (3) $x \geq 0$ のとき、不等式

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

が成り立つことを、次の (a)、(b) に分けて示せ。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (a) $x \geq 0$ のとき、不等式 $e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (b) $x \geq 0$ のとき、不等式 $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1$ が成り立つことを示せ。
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(配点率 20 %)