

1

曲線 $y = x \sin^2 x$ と直線 $y = x$ の共有点のうち、 x 座標が正のものを、 x 座標が小さいものから順に $A_1, A_2, A_3, \dots$ とし、第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A_n の x 座標を求めよ。また、点 A_n において、曲線 $y = x \sin^2 x$ と直線 $y = x$ は接していることを示せ。
- (2) 線分 $A_n A_{n+1}$ と曲線 $y = x \sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

(配点率 20 %)

2 直線 $y = x$ を l で, 直線 $y = -x$ を l' で表す。直線 l, l' のどちらの上にもない点 $A(a, b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l, l' とそれぞれ点 P, P' で交わるとする。点 Q を

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}$$

を満たすようにとる。ただし, O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき, 点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。

(配点率 20 %)

3

x, y を変数とする。

(1) n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 a, b を定めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} \\ = \frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数 n について、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{{}_n C_r}{x+r}$$

(配点率 20 %)

4 三角形 OAB の辺 OA 、 OB 上に、それぞれ点 P 、 Q をとり

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB} \quad (0 < a < 1, \quad 0 < b < 1)$$

とする。三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a 、 b を用いて表せ。また、その条件を満たす点 (a, b) はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。ただし、三角形 OPQ の辺上の点は、三角形 OPQ の内部に含まれないと考える。

(配点率 20 %)

- 5 一辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ の辺 BC 、 CD 、 DA 、 AB 上に、それぞれ点 P 、 Q 、 R 、 S を

$$\angle APB = \angle QPC, \quad \angle PQC = \angle RQD, \quad \angle QRD = \angle SRA$$

となるようにとる。ただし、点 P 、 Q 、 R 、 S は、どれも正方形 $ABCD$ の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 $PORT$ の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。 $f(t)$ の最大値を求めよ。

(配点率 20 %)