$\boxed{\mathbf{1}}$　平面上に点 O を中心とする半径 5 と 10 の同心円 C_1、C_2 があり，O から距離 2 のところに定点 A がある．動点 P_1、P_2 がそれぞれ C_1、C_2 上を一定の速さで反時計回りに動いている．ある時点で O、A、P_1、P_2 がこの順に一直線に並び，また，P_2 が 1 周する間に P_1 は 2 周するものとする．$\triangle AP_1P_2$ の面積の最大値を求めよ．ただし，A、P_1、P_2 が一直線上にある場合は面積を 0 とみなす.

$\boxed{\mathbf{2}}$　放物線 $y = x^2$ 上の相異なる 3 点 P，Q，R は △ PQR が正三角形になるように動いている。

(1) P, Q, R の x 座標を p, q, r とするとき, $p^2+q^2+r^2$ を $pq+qr+rp$ のみで表せ。

(2) △ PQR の重心はある一つの放物線上にあることを示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 　$a > 1$ とする．曲線 $y = \tan x$ （$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$）と直線 $y = ax$ によって囲まれた部分の面積を S とする．極限

$$\lim_{a \to \infty} \frac{S}{a}$$

を求めよ．ただし $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を証明なしに用いてもよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$　n，m を自然数とする．二つの袋 A，B があり，袋 A には n 個，袋 B には m 個の玉が入っている．それぞれの玉には 1 以上 n 以下の整数が一つずつ書かれている．袋 A の玉に書かれている数字には重複がない．一方，袋 B の玉に書かれている数字には重複があり得る．袋 B の m 個の玉に書かれている数字を $x_1, \cdots, x_m$ とする．

袋 A と袋 B からそれぞれ 1 個ずつ玉を取り出し，書かれている数字を比較する．袋 A から取り出した玉に書かれている数字が袋 B から取り出した玉に書かれている数字より大きくなる確率を p，袋 A から取り出した玉に書かれている数字が袋 B から取り出した玉に書かれている数字より小さくなる確率を q とする．

(1) $m = 2$ のとき，p と q を x_1, x_2 および n で表せ．

(2) $m = n$ のとき，$p = q$ となるための $x_1, \cdots, x_n$ についての条件を求めよ．