$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の正方行列 $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ を

$$A_0 = O, \quad A_n = B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定める。ただし，O は 2 次の零行列，B と C は 2 次の正方行列とする。

(1) $A_n(E - C)$ を B と C を用いて表せ。ここで E は 2 次の単位行列とする。

(2) B と C を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，A_{3n} を求めよ。

(配点率 20 %)

$\boxed{\mathbf{2}}$ 点 O で交わる 2 つの半直線 OX，OY があって $\angle XOY = 60^\circ$ とする。2 点 A，B が OX 上に O，A，B の順に，また，2 点 C，D が OY 上に O，C，D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2) 点 A，B と C，D が，$s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。

(配点率 20 %)

$\boxed{\mathbf{3}}$　N を 2 以上の自然数とする。

(1) 関数 $f(x)=(N-x)\log x$ を $1 \leqq x \leqq N$ の範囲で考える。このとき，曲線 $y=f(x)$ は上に凸であり，関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる。このことを示せ。

(2) 自然数の列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ を

$$a_n = n^{N-n} \quad (n=1,2,\ldots,N)$$

で定める。$a_1, a_2, \ldots, a_N$ のうちで最大の値を M とし，$M=a_n$ となる n の個数を k とする。このとき $k \leqq 2$ であることを示せ。

(3) (2) で $k=2$ となるのは，N が 2 のときだけであることを示せ。

(配点率 20 %)

4 t を負の実数とし，xy 平面上で曲線 $y = 2^{2x+2t}$ と曲線 $y = 2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする．

(1) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2) t が負の実数の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ．

(配点率 20 %)

$\boxed{\mathbf{5}}$ 　1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い、表が 500 回続けて出たときに終わるものとする。n を 500 以上の自然数とするとき、この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする。

(1) $501 \leqq n \leqq 1000$ のとき、$p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し、またその値を求めよ。

(2) $p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ。

(3) $1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき、$p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ。

(配点率 20 %)