

1 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $A_1(a_1, a_1^2), A_2(a_2, a_2^2), A_3(a_3, a_3^2) \dots$ を, A_{k+2} ($k \geq 1$) における C の接線が直線 $A_k A_{k+1}$ に平行であるようにとる。ただし, $a_1 < a_2$ とする。三角形 $A_k A_{k+1} A_{k+2}$ の面積を T_k とし, 直線 $A_1 A_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T_k$ を S を用いて表せ。

(配点率 20 %)

2 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする。点 $P(16\sqrt{3}, 16)$ をとり、 $P_1 = f(P)$ 、 $P_{n+1} = f(P_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。正の整数 k に対して、次の条件をみたす領域を D_k とする。

$$x < 0, \quad y < 0, \quad \sqrt{3}x + y \leq -2^{-k}$$

このとき D_k に含まれる P_n の個数を k で表せ。

(配点率 20 %)

3 α を 2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解とすると、 $(a + 5\alpha)(b + 5c\alpha) = 1$ をみたす整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。ただし、必要ならば $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい。

(配点率 20 %)

4

平面上の三角形 OAB を考え、辺 AB の中点を M とする。

$$\vec{a} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$$

とおき、点 P を $\vec{a} \cdot \vec{OP} = -\vec{b} \cdot \vec{OP} > 0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1) $\vec{MQ}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2) $|\vec{MQ}| = \frac{1}{2}(|\vec{OA}| + |\vec{OB}|)$ であることを示せ。

(配点率 20 %)

5 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $y = \log(nx)$ と $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = 1$ の交点のうち第 1 象限にある点を (p_n, q_n) とする。

(1) 不等式 $1 - q_n^2 \leq \frac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ を証明せよ。ただし, e は自然対数の底である。

(2) $S_n = \int_{\frac{1}{n}}^{p_n} \log(nx) dx$ を p_n で表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ。

(配点率 20 %)