$\boxed{\mathbf{1}}$ r, s, α, β を実数とする。ただし $\alpha \neq \beta$ とする。$a_1 = \alpha, b_1 = \beta$ として，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次のように定める。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ s & 1-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \; n = 1, 2, \cdots$$

(1) $n \to \infty$ のとき $a_n - b_n \to 0$ となるための r, s の満たすべき条件を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$ となるとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ．

(2) a, b を有理数とする．多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ が $f(1+\sqrt{3}) = 0$ を満たすとき，a, b を求めよ．

(3) n を 2 以上の自然数とする．$g(x)$ は有理数を係数とする n 次多項式で最高次の係数が 1 であるとする．$g(1+\sqrt{3}) = 0$ となるとき，$g(1-\sqrt{3}) = 0$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ Oを原点とする xyz 空間に3点 A（－ 2, － 2, 0），B（6, － 2, 0），C（－2, 4, 0）をとり，球 $S: x^2 + y^2 + (z-4)^2 \leqq 4$ を考える。

(1) 三角形 ABC の周または内部の点を P とする。このとき, $\alpha+\beta+\gamma=1$ となるような0以上の3つの実数 α, β, γ を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$$

と表されることを示せ。

(2) 点 P が三角形 ABC の周および内部を，点 Q は球 S の表面および内部を動くとき，線分 PQ の中点 M が動いてできる立体を V とする。次に，3 点 A’，B’，C’ に対して，大きさ 1 以下のベクトル $\overrightarrow{r}$ と $\alpha+\beta+\gamma=1$ となるような0以上の3つの実数 α，β，γ を用いて

$$\overrightarrow{OR} = \alpha\overrightarrow{OA'} + \beta\overrightarrow{OB'} + \gamma\overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{r}$$

と表される点 R 全体のなす集合を W とする。V と W が一致するような3点 A’，B’，C’ を求めよ。

(3) 立体 V の体積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ a, b, c を実数とする。$f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = x^3$ とおく。2 つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフが異なる 2 点 P, Q を共有している。さらに点 P での 2 つのグラフの接線が一致し、点 Q での 2 つのグラフの接線は直交しているとする。これらの条件を満たすように a, b, c を変化させるとき、2 つのグラフで囲まれた部分の面積 S の最小値を求めよ。