

1

p は素数, r は正の整数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $x_1, x_2, \dots, x_r$ についての式 $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^p$ を展開したときの
単項式

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_r^{p_r}$$

の係数を求めよ. ここで, $p_1, p_2, \dots, p_r$ は 0 または正の整数で

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_r = p$$

をみたすとする.

- (2) $x_1, x_2, \dots, x_r$ が正の整数のとき,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^p - (x_1^p + x_2^p + \cdots + x_r^p)$$

は p で割り切れることを示せ.

- (3) r は p で割り切れないとする. このとき, $r^{p-1} - 1$ は p で割り切れることを示せ.

2 $a > 0$ は定数, θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動く変数とする. xyz 空間で $(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ に中心をもち半径が a の球を S とする. さらに, S を zx 平面により二分し y 軸の負の方向にある部分を S_1 , S を yz 平面により二分し x 軸の負の方向にある部分を S_2 とする.

(1) S の体積 $V_1(\theta)$ を求めよ.

(2) S から S_1 と S_2 を取り除いた立体の体積を $V(\theta)$ とするとき,

$$V(\theta) \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

の最大値を求めよ.

3 曲線 $C: y = \frac{e^x}{1+e^x}$ 上に点 $A\left(a, \frac{e^a}{1+e^a}\right)$ をとる。ただし、 $a > 0$ とする。

- (1) C 上にあり A とは異なる点 $P\left(p, \frac{e^p}{1+e^p}\right)$ について、そこでの接線が A での接線と平行となるように p の値を定めよ。
- (2) p は上で定めた値とする。 C と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = p$ で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

4 円 C は、2 つの放物線 $P_1 : y = \frac{1}{4a}x^2$ ($a > 0$) と

$$P_2 : y = -\frac{1}{4b}x^2 + m \quad (b > 0, m > 0)$$

で囲まれた領域内にあり、両方の放物線と共有点をもち、さらに y 軸上に中心をもつとする。このとき、以下のことを示せ。

- (1) C が P_1 および P_2 のそれぞれと 1 点のみを共有するならば、 $m \leq 4a$
かつ $m \leq 4b$ である。
- (2) C が P_1 および P_2 のそれぞれと 2 点を共有するならば、 $(a+b)^2 < ma$
かつ $(a+b)^2 < mb$ である。