

1 a を自然数とする。 O を原点とする座標平面上で行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

の表す 1 次変換を f とする。

(1) $r > 0$ および $0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて $A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ と表す

とき, $r, \cos \theta, \sin \theta$ を a で表せ。

(2) 点 $Q(1, 0)$ に対し, 点 Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$Q_1 = Q, \quad Q_{n+1} = f(Q_n)$$

で定める。 $\triangle OQ_nQ_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ。

(3) f によって点 $(2, 7)$ に移される点 P の x 座標の小数第一位を四捨五

入して得られる近似値が 2 であるという。自然数 a の値を求めよ。

またこのとき $S(n) > 10^{10}$ となる最小の n の値を求めよ。ただし

$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ を用いてよい。

(配点率 20 %)

2 実数 θ が動くとき, xy 平面上の動点 $P(0, \sin \theta)$ および $Q(8 \cos \theta, 0)$ を考える。 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする。 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(配点率 20 %)

3

実数の組 (p, q) に対し, $f(x) = (x - p)^2 + q$ とおく。

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り, しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ。
- (2) 実数の組 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ に対して, $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$ とおく。実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ。

- (3) 長方形 $R : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える。また, 4 点 $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする。実数の組 (p, q) を, 放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき, R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする。 R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し, その面積を求めよ。

(配点率 20 %)

4

a, b, c を正の定数とし, x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。

以下, 定数はすべて実数とする。

- (1) 定数 p, q に対し, 次をみたす定数 r が存在することを示せ。

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad |px + q| \leq rx$$

- (2) 恒等式 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて, 次をみたす定数 k, l が存在することを示せ。

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{l}{x}$$

- (3) すべての自然数 n に対して, $\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする。このとき関数 $f(x)$ は, 自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x + m)^3$ と表されることを示せ。

(配点率 20 %)

- 5 正数 r に対して, $a_1 = 0, a_2 = r$ とおき, 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める。

$$a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ, 表が出たとき $r_n = \frac{r}{2}$, 裏が出たとき $r_n = \frac{1}{2r}$ とする。ここで表が出る確率と裏が出る確率は等しいとする。 a_n の期待値を p_n とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) p_3 および p_4 を, r を用いて表せ。
- (2) $n \geq 3$ のときに p_n を, n と r を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ。
- (4) r が (3) で求めた範囲を動くとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ の最小値を求めよ。

(配点率 20 %)