$\boxed{\mathbf{1}}$　座標平面上に原点 O を中心とする半径 5 の円 C がある．n = 2 または n = 3 とし，半径 n の円 C_n が円 C に内接して滑ることなく回転していくとする．円 C_n 上に点 P_n がある．最初，円 C_n の中心 O_n が $(5-n\,,0)$ に，点 P_n が (5, 0) にあったとして，円 C_n の中心が円 C の内部を反時計回りに n 周して，もとの位置に戻るものとする．円 C と円 C_n の接点を S_n とし，線分 OS_n が x 軸の正の方向となす角を t とする．

(1) 点 P_n の座標を t と n を用いて表せ．

(2) 点 P_2 の描く曲線と点 P_3 の描く曲線は同じであることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $m=2$ または $m=3$ とする。n を自然数とし，1 以上 n 以下の整数値をとる m 項の数列 $\{a_1,\cdots,a_m\}$ のうち，$1 \leqq k \leqq m-1$ に対して $2a_k \leqq a_{k+1}$ を満たすものの個数を $S_m(n)$ とする。

(1) $S_2(n)$ を求めよ。

(2) $S_3(2n+1)-S_3(2n)=S_2(j)$ を満たす自然数 j を求めよ。

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}$$

を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ x，y は $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある 0 でない実数で，次の等式

$$\sin^3 x + \sin^3 y = \frac{3\sqrt{15}}{32}, \quad \frac{\sin y}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin y} = 3$$

を満たすとする．このとき，$x + y$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。点 A $(-2,0)$ を通る直線が $y>0$ の範囲にある点 P において円 C と接するとする。自然数 $n \leqq 2$ に対して点 A を通る $(n-1)$ 本の直線で $\angle$ OAP を n 等分する。これらの直線を直線 AO となす角が小さいものから順に $l_1, \cdots, l_{n-1}$ とし，直線 l_k と円 C の 2 つの交点のうち点 A に近い方を Q_k，他方を R_k とする。

(1) $AR_k^2 - AQ_k^2$ を n と k を用いて表せ。

(2) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (AR_k^2 - AQ_k^2)$$

を求めよ。