

1

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{2 + n(a_n + 1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を n を用いて表せ。
- (3) $\lim_{m \rightarrow \infty} m \sum_{n=m+1}^{2m} a_n$ を求めよ。

2

θ を実数とし、行列 $P(\theta)$, J , E を以下で定める。

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Q = P\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ とおく。 n, k を自然数とする。 n 個の Q と k 個の J からなる順列

$$A_1, A_2, \dots, A_{n+k}$$

で行列の積 $A_1 A_2 \cdots A_{n+k}$ が E と等しいものの個数を $N(n, k)$ とする。

(1) $JP(\theta) = P(-\theta)J$ を示せ。

(2) $N(200, 2)$ を求めよ。

(3) $N(10, 4)$ を求めよ。

3

2つの関数を

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad g(t) = t^2 - 2 \log t$$

で定める．実数 t が $t > 0$ の範囲を動くとき，点 $(f(t), g(t))$ が xy 平面上を描く曲線を C とする．

- (1) $t > 1$ のとき $g(t) > g\left(\frac{1}{t}\right)$ であることを示せ．
- (2) s を 1 以上の実数とする．直線 $x = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ．
- (3) a を 1 より大きい実数とする．直線 $x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$ と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

4

a を 1 以上の実数とする。 x についての方程式

$$(4x^3 - 1)(x - a) - 3a^2 + 1 = 0$$

の最大の実数解を $s(a)$ とし, $s(a)$ の小数部分を $r(a)$ とする。すなわち $s(a)$ 以下の最大の整数を $[s(a)]$ とするとき, 等式 $r(a) = s(a) - [s(a)]$ によって $r(a)$ を定める。

- (1) $a < s(a) < a + 1$ を示せ。
- (2) 自然数 n に対し $b_n = s(n)r(n)$ とおく。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

を求めよ。

- (3) 次の条件 (P) をみたす実数 c の範囲を求めよ。(P) すべての自然数 n に対して $s(n)r(n) < c$ が成り立つ。