

1

三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を示すことにより, $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ。

(配点率 20 %)

2 不等式

$$1 \leq |x| - 2 + |y| - 2 \leq 3$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(配点率 20 %)

3

4 個の整数

$$n+1, \quad n^3+3, \quad n^5+5, \quad n^7+7$$

がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。

(配点率 20 %)

4

xyz 空間内の 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする。円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(配点率 20 %)

5

n を 3 以上の整数とする。 n 個の球 $K_1, K_2, \dots, K_n$ と n 個の空の箱 $H_1, H_2, \dots, H_n$ がある。以下のように、 $K_1, K_2, \dots, K_n$ の順番に、球を箱に 1 つずつ入れていく。

まず、球 K_1 を箱 $H_1, H_2, \dots, H_n$ のどれか 1 つに無作為に入れる。次に、球 K_2 を、箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ、箱 H_2 が空でなければ残りの $n - 1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

一般に、 $i = 2, 3, \dots, n$ について、球 K_i を、箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ、箱 H_i が空でなければ残りの $n - i + 1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

(1) K_n が入る箱は H_1 または H_n である。これを証明せよ。

(2) K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ。

(配点率 20 %)