

1

1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し、関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の条件 (ア), (イ), (ウ) で定める。

(ア) $f_1(x) = \sin(\pi x)$

(イ) $f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(ウ) $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

以下の問いに答えよ。

(1) $a = 2, b = 3$ のとき、 $f_5(0)$ を求めよ。

(2) $a = 1, b = 6$ のとき、 $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ。

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて、1 回目に出る目を a 、2 回目に出る目を b とするとき、 $f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ。

(配点率 20 %)

2

次の問いに答えよ。

- (1) c を正の定数とする。正の実数 x, y が $x + y = c$ をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ。

- (2) 正の実数 x, y, z が $x + y + z = 1$ をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ。

(配点率 20 %)

3

座標平面において、原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y = \sqrt{2}(x-1)^2$ は、ただ 1 つの共有点 (a, b) をもつとする。

(1) a, b, r の値をそれぞれ求めよ。

(2) 連立不等式

$$a \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2 + y^2 \geq r^2$$

の表す領域を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(配点率 20 %)

4

正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

とおき, 1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする。

- (1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき, $2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ。
- (2) $S_n = 2 + \frac{m}{20}$ となる正の整数の組 (n, m) をすべて求めよ。
- (3) 整数 $a \leq 0 \leq b < 1$ をみたす実数 b を用いて,

$$A_{20} S_{20} = a + b$$

と表すとき, b の値を求めよ。

(配点率 20 %)

5

円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び、円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。
 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ とおき、 $\vec{d}$ の大きさを x とする。

- (1) $\vec{A}$ の大きさを y とするとき、 $x^2 = y(y - x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\overrightarrow{BC}$ を $\vec{a}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。 R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ。
- (4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし、 R_n の面積を S_n とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ。

(配点率 20 %)