$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ の範囲で不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ。

(2) x が $x > 0$ の範囲を動くとき，

$$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

(配点率 20 %)

$\boxed{\mathbf{2}}$ a, b を正の実数とし，$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ とする．

(1) c を実数とし，$f(x)$ が $x - c$ で割り切れるとする．このとき，$c > 0$ であり，$f(x)$ は $(x-c)(x-\dfrac{1}{c})$ で割り切れることを示せ.

(2) $f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるとき，$a \geqq 4$ が成り立つことを示せ.

(3) $a = 5$ とする．$f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ.

(配点率 20 %)

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2 つの関数

$$f(t) = 2\sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2\cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C : x = f(t), \quad y = g(t) \quad (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$$

を考える．

(1) t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ．

(2) t_1, t_2 を $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ を満たす実数とする．このとき，$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) C と直線 $x = 1$ が囲む領域の面積 S を求めよ．

(配点率 20 %)

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標空間に 6 点

$$A(0,0,1), B(1,0,0), C(0,1,0), D(-1,0,0), E(0,-1,0), F(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体 $ABCDEF$ がある。s, t を $0 < s < 1,\ 0 < t < 1$ を満たす実数とする。線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし，線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする。

(1) 4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ。

(2) 線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする。s, t が $0 < s < 1,\ 0 < t < 1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3) 正八面体 $ABCDEF$ の 4 点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする。線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき，X を最大とするような s, t の値と，そのときの X の値を求めよ。

(配点率 20 %)

$\boxed{\mathbf{5}}$ p, q を $0 < p < 1,\ 0 < q < 1$ を満たす実数とし，n を 2 以上の整数とする。2 つのチーム A, B が野球の試合を n 回行う。1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする。また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする。なお，試合結果に引き分けはなく，勝敗が決まるとする。

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ とする。B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。

(配点率 20 %)