

1 a, b を $ab < 1$ をみたす正の実数とする. xy 平面上の点 $P(a, b)$ から,
曲線

$$y = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

に 2 本の接線を引き, その接点を $Q\left(s, \frac{1}{s}\right)$, $R\left(t, \frac{1}{t}\right)$ とする. ただし,
 $s < t$ とする.

(1) s および t を a, b を用いて表せ.

(2) 点 $P(a, b)$ が曲線 $y = \frac{9}{4} - 3x^2$ 上の $x > 0, y > 0$ をみたす部分を動くとき, $\frac{t}{s}$ の最小値とそのときの a, b の値を求めよ.

(配点率 20 %)

2

空間内に、同一平面上にない4点 O, A, B, C がある. s, t を $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ をみたす実数とする. 線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0 , 線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0 , 線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P , 線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする. さらに4点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるとする.

(1) t を s を用いて表せ.

(2) $|\overrightarrow{OA}| = 1$, $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2$, $\angle AOB = 120^\circ$,

$\angle BOC = 90^\circ$, $\angle COA = 60^\circ$, $\angle POQ = 90^\circ$ であるとき, s の値を求めよ.

(配点率 20 %)

3

n を自然数とし, t を $t \geq 1$ をみたす実数とする.

(1) $x \geq t$ のとき, 不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x \, dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2} \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right)$ とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - pn) = q$ をみたすような実数 p, q の値を求めよ.

(配点率 20 %)

4

整数 a, b, c に関する次の条件 (*) を考える.

$$\int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \cdots \cdots (*)$$

- (1) 整数 a, b, c が (*) および $a \neq b$ をみたすとき, c は 3 の倍数であることを示せ.
- (2) $c = 3600$ のとき, (*) および $a < b$ をみたす整数の組 (a, b) の個数を求めよ.

(配点率 20 %)

5

次の問いに答えよ.

- (1) a を実数とする. x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち,
 $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ.
- (2) 自然数 n に対し, $x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数 x
を x_n とおく. t を $|t| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とする. このとき, 曲線
 $C: y = \sin x$ 上の点 $P(t, \sin t)$ における接線が, 不等式 $x \geq \frac{\pi}{2}$ の表
す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件
は, t が $x_1, x_2, x_3, \dots$ のいずれかと等しいことであることを示せ.

(配点率 20 %)