

1 r を正の実数とする．複素数平面上で，点 z が点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，

$$z + w = zw$$

を満たす点 w が描く図形を求めよ．

(配点率 20 %)

2 $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ であることを示せ。
- (2) $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とするとき, $f(\cos \alpha) = 0$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\cos \alpha$ は無理数であることを示せ。

(配点率 20 %)

- 3** 正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $P(0, t)$ と $Q\left(\frac{1}{t}, 0\right)$ を考える。 t が $1 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ。

(配点率 20 %)

4

$f(x) = \log(x+1) + 1$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = x$ は、 $x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。
(2) (1) の解を α とする。実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

- (3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、すべての自然数 n に対して、

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ。

- (4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ を示せ。

(配点率 20 %)

5 座標平面において, t を媒介変数として

$$x = e^t \cos t + e^\pi, \quad y = e^t \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を C とする. 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(配点率 20 %)