

|   |
|---|
| 1 |
|---|

以下の各問いに答えよ。ただし  $\pi$  は円周率を表す。

- (1) 複素数  $z$  が  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$  を満たすとき

$$(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3)(1 - z^4)$$

の値を求めよ。

- (2) 絶対値 1, 偏角  $2\theta$  ( $0 \leq \theta < \pi$ ) の複素数  $\omega$  に対して  $r = |1 - \omega|$  とおく

とき,  $\sin \theta$  を  $r$  を用いて表せ。

- (3)  $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$  の値を求めよ。

以下の各問いに答えよ。

- (1) 座標平面上で 3 点  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$  を頂点にもつ正方形を考える。実数  $t$  ( $0 \leq t \leq 2$ ) に対して, 2 点  $P(t,0)$ ,  $Q(0,t)$  を通る直線とこの正方形が交わってできる線分の長さを  $L(t)$  とする。このとき, 関数  $L(t)$  のグラフを描き, 定積分  $\int_0^2 L(t)dt$  の値を求めよ。
- (2) 座標空間において 4 点  $O(0,0,0)$ ,  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$ ,  $C(0,0,1)$  を頂点にもつ立方体を考える。実数  $t$  ( $0 \leq t \leq 3$ ) に対して, 3 点  $P(t,0,0)$ ,  $Q(0,t,0)$ ,  $R(0,0,t)$  を通る平面によるこの立方体の切り口の面積を  $S(t)$  とする。このとき, 関数  $S(t)$  の最大値を求めよ。
- (3) 定積分  $\int_0^3 S(t)dt$  の値を求めよ。

数の集合  $A$  に関する以下の諸条件を考える。ただし  $n, k$  は  $n \geq k \geq 0$  を満たす整数とし,  $x, y$  は任意の数とする。

条件  $Z$  :  $x$  が  $A$  の要素ならば  $x$  は整数。

条件  $P_n$  :  $x$  が  $A$  の要素ならば  $1 \leq x$  かつ  $x \leq n_0$ 。

条件  $Q_k$  :  $A$  はちょうど  $k$  個の要素からなる。

条件  $R$  :  $x, y$  が  $A$  の要素ならば  $x - y + 1 \neq 0$ 。

条件  $S_{n,k}$  :  $A$  は 3 条件  $Z, P_n, Q_k$  を満たす。

条件  $T_{n,k}$  :  $A$  は条件  $S_{n,k}$  および条件  $R$  を満たす。

条件  $S_{n,k}$  を満たすような集合  $A$  の個数を  $f(n, k)$  と表し、条件  $T_{n,k}$  を満たすような集合  $A$  の個数を  $g(n, k)$  と表す。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1)  $f(n, 0)$  および  $f(n, n)$  を求めよ。また,  $n > k \geq 1$  のとき  $f(n, k)$  を  $f(n-1, k)$  と  $f(n-1, k-1)$  を用いて表せ。
- (2)  $n > k \geq 1$  のとき  $g(n, k)$  を  $g(n-1, k)$  と  $g(n-2, k-1)$  を用いて表せ。
- (3)  $m \geq 1, \ell \geq 0$  なる整数  $m, \ell$  に対して整数  $h(m, \ell)$  を

$$h(m, \ell) = g(m + \ell - 1, \ell)$$

で定義する。このとき  $h(m, 0)$  および  $h(m, m)$  を求めよ。また,  $m > \ell \geq 1$  のとき  $h(m, \ell)$  を  $h(m-1, \ell)$  と  $h(m-1, \ell-1)$  を用いて表せ。

- (4)  $g(12, 4)$  を求めよ。