

1

(60 点)

a, b を正の実数とする。

(1) 区間 $a < x$ における関数 $f(x) = \frac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2) 区間 $a < x$ における関数 $g(x) = \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。

2

(60 点)

次の問いに答えよ。

- (1) $f(x), g(x)$ を連続な偶関数, m を正の整数とすると,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = m \int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$$

を証明せよ。

- (2) 正の整数 m, n が $m\pi \leq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき,

$$\begin{aligned} \frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx &\leq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx \\ &\leq \frac{m+1}{m\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \end{aligned}$$

を証明せよ。

- (3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx$$

を求めよ。

3

(60 点)

3 枚のコイン P, Q, R がある。P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ p, q, r とする。このとき次の操作を n 回繰り返す。まず, P を投げて表が出れば Q を, 裏が出れば R を選ぶ。次にその選んだコインを投げて, 表が出れば赤玉を, 裏が出れば白玉をつぼの中に入れる。

- (1) n 回ともコイン Q を選び, つぼの中には k 個の赤玉が入っている確率を求めよ。
- (2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ。
- (3) $n = 2004, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{5}$ のとき, つぼの中に何個の赤玉が入っていることがもっとも起こりやすいかを求めよ。

4

(70 点)

$0 < r < 1$ とする。空間において、点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 r の球と点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{1 - r^2}$ の球との共通部分の体積を $V(r)$ とする。
次の問いに答えよ。

(1) $V(r)$ を求めよ。

(2) r が $0 < r < 1$ の範囲を動くとき、 $V(r)$ を最大にする r の値および $V(r)$ の最大値を求めよ。