

|   |
|---|
| 1 |
|---|

(60 点)

$e$  を自然対数の底とし, 数列  $\{a_n\}$  を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1)  $n \geq 3$  のとき, 次の漸化式を示せ。

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2)  $n \geq 1$  に対し  $a_n > a_{n+1} > 0$  なることを示せ。

(3)  $n \geq 2$  のとき, 以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n)}(e-2)$$

**2**

(50 点)

1 から 6 までの目が  $\frac{1}{6}$  の確率で出るサイコロを振り, 1 回目に出る目を  $a$ , 2 回目に出る目を  $\beta$  とする。2 次式  $(x - a)(x - \beta) = x^2 + sx + t$  を  $f(x)$  とおき  $f(x)^2 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  とする。

(1)  $s$  および  $t$  の期待値を求めよ。

(2)  $a, b, c$  および  $d$  の期待値を求めよ。

**3**

(70 点)

$D$  を半径 1 の円盤,  $C$  を  $xy$  平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。  
 $D$  がつぎの条件 (a), (b) を共に満たしながら  $xyz$  空間内を動くとき,  $D$  が通過する部分の体積を求めよ。

(a)  $D$  の中心は  $C$  上にある。

(b)  $D$  が乗っている平面は常にベクトル  $(0, 1, 0)$  と直交する。

4

(70 点)

実数  $x, y$  が  $x^2 + y^2 \leq 1$  を満たしながら変化するとする。

- (1)  $s = x + y, t = xy$  とするとき、点  $(s, t)$  の動く範囲を  $st$  平面上に図示せよ。
- (2) 負でない定数  $m \geq 0$  をとるとき、 $xy + m(x + y)$  の最大値、最小値を  $m$  を用いて表せ。