

1

以下の各問いに答えよ。

- (1) 次の 3 条件 (a), (b), (c) を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数を求めよ。

(a) $a_1 \geq 1$

(b) $a_5 \leq 4$

(c) $a_i \leq a_{i+1} \ (i = 1, 2, 3, 4)$

- (2) 次の 3 条件 (a), (b), (c) を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数を求めよ。

(a) $a_1 \geq 1$

(b) $a_i \geq 0 \ (i = 2, 3, 4, 5)$

(c) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$

- (3) n 桁の自然数で各桁の数字の合計が r 以下となるものの個数を n, r を用いて表せ。ただし $n \geq 1, r \leq 9$ とする。

2

四面体 $OABC$ において、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ は互いに垂直であるとする。点 O から三角形 ABC を含む平面に垂線 ℓ を引き、その平面と ℓ との交点を H とする。このとき

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ を示せ。

さらに $AC = 2$ 、 $BC = 3$ とする。また 2 点 A 、 H を通る直線と辺 BC との交点を D とするとき、点 H は線分 AD を $2:1$ の比に内分しているとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(2) $\overrightarrow{CH} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}$ となる定数 α 、 β を求めよ。

(3) 辺 AB の長さを求めよ。

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

3

以下の各問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(2) 次の 2 条件 (a)、(b) を満たす微分可能な関数 $\varphi(x)$ およびその逆関数 $h(x)$ を求めよ。

(a) $\varphi(0) = 0$

(b) $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(3) 次の 4 条件 (a)、(b)、(c)、(d) を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。

(a) $f(0) = 1$

(b) $f'(0) = 0$

(c) すべての実数 a に対して $f(a) = f(-a)$ が成立する。

(d) 正の実数 t に対して座標平面上の曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq t$) の長さを $\ell(t)$ と表すとき、すべての正の実数 t に対して $\ell(t) = f'(t)$ が成立する。