$\boxed{\mathbf{1}}$ (60 点)

以下の間に答えよ。

(1) 自然数 n に対し $I(n) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} |\sin x|\, dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx - s \leqq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) s \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

(3) a を正の数とし，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。$[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\pi/2} |\sin at|\, dt - 1 \leqq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{[a]}{a}\right)$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (60 点)

以下の問に答えよ。

(1) a, b を正の定数とし，$g(t) = \dfrac{1}{b}t^a - \log t$ とおく。$t > 0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ極値を求めよ。

(2) m を正の定数とし，xy 座標平面において条件

- (a) $y > x > 0$；
- (b) すべての $t > 0$ に対し $\dfrac{1}{y}t^x - \log t \geqq m$

を満たす点 (x, y) からなる領域を D とする。D の概形を図示せよ。

(3) (2) の領域 D の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ (70 点)

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件 (a) と (b) を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

- (a) 3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。
- (b) 3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。

$\boxed{\mathbf{4}}$ (60 点)

空間内の四面体 $ABCD$ を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を，それぞれ K, L, M, N とする。

(1) $4\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{LN} = |AC|^2 - |BD|^2$ を示せ。ここに $|AC|$ はベクトル AC の長さを表す。

(2) 四面体 $ABCD$ のすべての面が互いに合同であるとする。このとき $|AC| = |BD|$, $|BC| = |AD|$, $|AB| = |CD|$ を示せ。

(3) 辺 AC の中点を P とし，$|AB| = \sqrt{3}$, $|BC| = \sqrt{5}$, $|CA| = \sqrt{6}$ とする。(2) の仮定のもとで，四面体 $PKLN$ の体積を求めよ。