$\boxed{\mathbf{1}}$

以下の各問いに答えよ。

(1) 底面の半径が r，高さが h の直円錐の側面積を r と h を用いて表せ。

(2) 座標平面上の 4 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{E}\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{F}(0, 1)$ を考える。四角形 ABEF を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の表面積を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線

$$C : x^2 + y^2 = 3 \quad (0 < x < \sqrt{2}, 1 < y < \sqrt{3})$$

の上の点 Q を考える。点 Q と同じ y 座標を持つ y 軸上の点を H とし，原点 O と点 Q を結ぶ線分 OQ が直線 $y = 1$ と交わる点を P とする。さらに点 $\mathrm{F}(0, 1)$ をとる。四角形 PQHF を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の面のうち，線分 PQ が 1 回転してできる面の表面積を S とする。点 Q が曲線 C 上を動くとき S の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$

座標平面上の動点 Q が以下の規則 (a)〜(f) に従って 1 秒ごとに移動する。

(a) 原点 $(0,0)$ を出発点とし，まず点 $(1,0)$ または点 $(0,1)$ または点 $(0,-1)$ に，それぞれ確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動する。

(b) ある時刻に点 $(x-1,y)$ から点 (x,y) に移動したならば，その 1 秒後には点 $(x+1,y)$ または点 $(x,y+1)$ または点 $(x,y-1)$ に，それぞれ確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動する。

(c) ある時刻に点 $(x,0)$ から点 $(x,1)$ に移動したならば，その 1 秒後には点 $(x,2)$ または点 $(x+1,1)$ に，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する。

(d) ある時刻に点 $(x,0)$ から点 $(x,-1)$ に移動したならば，その 1 秒後には点 $(x,-2)$ または点 $(x+1,-1)$ に，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する。

(e) ある時刻に点 $(x,1)$ または点 $(x,-1)$ から点 $(x,0)$ に移動したならば，その 1 秒後には点 $(x+1,0)$ に移動する。

(f) 直線 $y=2$ 上の点または直線 $y=-2$ 上の点に達した場合には停止する。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) n を正の整数とするとき，Q がある時刻に点 $(n-1,0)$ に位置し，かつその 1 秒後に点 $(n,0)$ に移動している確率を p_n とする。また Q がある時刻に点 $(n-1,1)$ に位置し，かつその 1 秒後に点 $(n,1)$ に移動している確率を p'_n とする。p_1, p_2, p'_1, p'_2 を，それぞれ求めよ。

(2) Q が直線 $x=2$ 上の点に達する確率，および直線 $x=3$ 上の点に達する確率をそれぞれ求めよ。

(3) m を正の整数とするとき，Q が点 $(m,0)$ に達する確率を m で表せ。

3

$ad-bc=1,\ a>0$ を満たす整数 a,b,c,d を考える。行列

$$A=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 10 & 17\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

が $NA=BM^{-1}$ を満たすとき，以下の各問いに答えよ。ただし，M^{-1} は M の逆行列を表す。

(1) $6a^2+20ac+17c^2$ の値を求めよ。

(2) $2a^2+b^2$ の値を求めよ。

(3) a,b,c,d の値を求めよ。

(4) $6x^2+20xy+17y^2=59$ を満たす実数 x，y に対して

$$\begin{cases}X=dx-by\\ Y=-cx+ay\end{cases}$$

とおくとき，X^2+2Y^2 の値を求めよ。

(5) $6x^2+20xy+17y^2=59$ を満たす整数の組 (x,y) をすべて求めよ。