$\boxed{\mathbf{1}}$ (50 点)

p を素数，n を 0 以上の整数とする．

(1) m は整数で $0 \leqq m \leqq n$ とする．1 から p^{n+1} までの整数の中で，p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ．

(2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x，y に対し，その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 (x, y) の個数を求めよ．

2 (60 点)

正数 a に対して，放物線 $y=x^2$ 上の点 $A(a,a^2)$ における接線を，A を中心に -30° 回転した直線を l とする。l と $y=x^2$ との交点で A でない方を B とする。さらに点 $(a,0)$ を C，原点を O とする。

(1) l の式を求めよ。

(2) 線分 OC, CA と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$，線分 AB と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$$

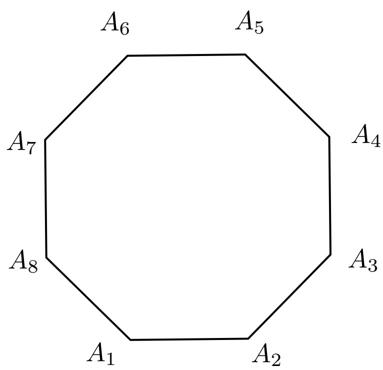
を求めよ。

3 (70 点)

一辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上を 3 点 P, Q, R が動くとする。

(1) $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ。

(2) Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し，$\angle PQR = 90^\circ$ となるとき $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ。



$\boxed{\mathbf{4}}$ (70 点)

(1) 整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ と正数 a_n に対して

$$f_n(x) = a_n(x-n)(n+1-x)$$

とおく。2 つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2) $f_n(x)$ は (1) で定めたものとする。$y = f_0(x)$, $y = e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0，$n \geqq 1$ に対し $y = f_{n-1}(x)$, $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき $\lim_{n \to \infty}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$ を求めよ。