

1

座標空間内に 5 点

$$P(0, 0, h), \quad Q(t, 0, 0), \quad R(0, t, 0), \quad S(-t, 0, 0), \quad T(0, -t, 0)$$

をとる。ここで t, h は $0 < t < 1, h > 0$ を満たす実数である。また点 $A(1, 1, 0)$ と点 Q を結ぶ線分の長さは線分 PQ の長さと同じとする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) 四角錐 $PQRST$ の表面積を t を用いて表せ。
- (2) h を t を用いて表せ。
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲で変化するとき、四角錐 $PQRST$ の体積の最大値を求めよ。

2

以下の各問いに答えよ。ただし t は $0 < t < \pi$ を満たす実数とする。

(1) 次の等式を証明せよ。

$$\left(\cos \frac{t}{2}\right)\left(\cos \frac{t}{4}\right)\left(\cos \frac{t}{8}\right)=\frac{\sin t}{8 \sin \frac{t}{8}}$$

(2) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を t を用いて表せ。

$$a_1 = \cos \frac{t}{2}, \quad a_n = a_{n-1} \left(\cos \frac{t}{2^n} \right) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

(3) 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ を次のように定義する。

$$b_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad b_n = \sqrt{\frac{1+b_{n-1}}{2}} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad c_n = c_{n-1} b_n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ。

3

微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が次の 4 条件を満たしている。

- (a) 任意の正の実数 x について $f(x) > 0, g(x) > 0$
- (b) 任意の実数 x について $f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$
- (c) 任意の実数 x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ および $g(0)$ を求めよ。
- (2) $|f(x)|^2 - |g(x)|^2$ を求めよ。
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-f(x)}{x^2}$ を求めよ。
- (4) $f(x)$ の導関数を $g(x)$ を用いて表せ。
- (5) 曲線 $y = f(x)g(x)$, 直線 $x = a$ ($a > 0$) および x 軸で囲まれる図形の面積が 1 のとき $f(a)$ の値を求めよ。