$\boxed{\textbf{1}}$ (60 点) 正の実数 a, b に対し，$x > 0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする。

(1) 接点の座標 (s, t) を a を用いて表せ。また，b を a の関数として表せ。

(2) $0 < h < s$ をみたす h に対し，直線 $x = h$ および 2 つの曲線 $y = x^a$, $y = \log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする。$\lim_{h \to 0} A(h)$ を a で表せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ (60 点)

実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a, b を正の実数とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty} x^c \left(\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} \right)$$

が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。

3 (60 点)

いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする．このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする．

(1) $P \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ．また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{4} \geqq Q \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}P$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (70 点)

平面の原点 O を端点とし, x 軸となす角がそれぞれ $-a$, a（ただし $0 < a < \dfrac{\pi}{3}$）である半直線を L_1, L_2 とする。L_1 上に点 P, L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に $\triangle PQR$ が正三角形になるようにとる。

(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ。

(2) 2 点 P, Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1, L_2 上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。