

1

(60 点)

点 P から放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ に 2 本の接線が引けるとき、2 つの接点を A, B とし、線分 PA, PB およびこの放物線で囲まれる図形の面積を S とする． PA, PB が直交するときの S の最小値を求めよ．

2

(60 点)

実数 a に対し, 次の 1 次変換

$$f(x, y) = (ax + (a - 2)y, \quad (a - 2)x + ay)$$

を考える。以下の 2 条件をみたす直線 L が存在するような a を求めよ。

(1) L は点 $(0, 1)$ を通る。

(2) 点 Q が L 上にあれば, その f による像 $f(Q)$ も L 上にある。

3

(60 点)

N を正の整数とする。 $2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 (m, n) で, 方程式

$$x^2 - nx + m = 0$$

が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

4

(70 点)

xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) ℓ 上の点 $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$ を通り ℓ と垂直な平面が, xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式 $0 \leq y \leq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。 ℓ を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。