$\boxed{\mathbf{1}}$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} a_1 = 5, \quad b_1 = 3, \\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

また，自然数 n について $c_n = a_n^2 - b_n^2$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) c_n を n を用いて表せ。

(2) k を自然数とするとき，自然数 ℓ について

$$a_{k+\ell} = a_k a_\ell + b_k b_\ell, \quad b_{k+\ell} = b_k a_\ell + a_k b_\ell$$

が成立することを，ℓ に関する数学的帰納法によって示せ。

(3) $n > \ell$ となる自然数 n，ℓ について

$$b_{n+\ell} - c_\ell b_{n-\ell} = 2a_n b_\ell$$

が成立することを示せ。

(4) 2 以上の自然数 n について

$$a_{2n} + \sum_{m=1}^{n-1} c_{n-m} a_{2m} = \frac{b_{2n+1}}{2b_1} - \frac{c_n}{2}$$

が成立することを示せ。

2

$a^2+b^2=1$ を満たす正の実数 a，b の組 (a,b) の全体を S とする。S に含まれる (a,b) に対し，xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{P}(a,b,b)$，$\mathrm{Q}(-a,b,b)$，$\mathrm{R}(0,0,b)$ をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_1 とする。(a,b) が S の中を動くとき，F_1 の体積の最大値を求めよ。

(2) 三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_2 とする。

$$a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

のとき，F_2 の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。

(3) 三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_3 とする。(a,b) が S の中を動くとき，F_3 の体積の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$

関数 $f(x) = x^3 - x^2 + x$ について，以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。$x > 0$ について

$$\sqrt[3]{x} - 1 < g(x) < \sqrt[3]{x} + 1$$

が成立することを示せ。

(3) $b > a > 0$ について

$$0 < \int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx < \frac{1}{a}$$

が成立することを示せ。

(4) 自然数 n について，(2) で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n = \int_n^{2n} \frac{1}{(g(x))^3 + g(x)}\,dx$$

とおくとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ。