

1

以下の各問いに答えよ。

(1) 実数 α, β が $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \tan \alpha \tan \beta = 1$ を満たすとき,
 $\alpha + \beta$ の値を求めよ。

(2) 実数 α, β, γ が $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$
を満たすとき,

$$\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha$$

の値は一定であることを示せ。

(3) 実数 α, β, γ が $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$
を満たすとき,

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

2

次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のうち、次の 3 条件 (i), (ii), (iii) を満たすもの全体の集合を M とする。

- (i) a, b, c, d はすべて整数
- (ii) $b + c = 0$
- (iii) $a - b - d = 0$

また E を 2 次単位行列とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) 行列 A, B がともに M の要素であるとき、それらの積 AB も M の要素であることを示せ。
- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とその逆行列 A^{-1} がともに M の要素であるとき、 $ad - bc = 1$ が成立することを示せ。
- (3) 行列 A とその逆行列 A^{-1} がともに M の要素であるような A をすべて求めよ。
- (4) 自然数 n について、 M の要素であって $A^n = E$ を満たすような行列 A の全体の集合を S_n とする。 S_n の要素の個数がちょうど 3 となる n をすべて求めよ。

m, n を自然数として、関数 $f(x) = x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値を m, n を用いて表せ。

(2) 定積分

$$\int_0^1 f(x) dx$$

を m, n を用いて表せ。

(3) a, b, c を実数として、関数 $g(x) = ax^2 + bx + c$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値を $M(a, b, c)$ とする。次の 2 条件 (i), (ii) が成立するとき、 $M(a, b, c)$ の最小値を m, n を用いて表せ。

(i) $g(0) = g(1) = 0$

(ii) $0 < x < 1$ のとき $f(x) \leq g(x)$

(4) m, n が 2 以上の自然数で $m > n$ であるとき

$$\frac{(m+n+1)!}{m!n!} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^n n^n} > 2^{2n-1}$$

が成立することを示せ。