

1

自然数 n に対し、3 個の数字 1、2、3 から重複を許して n 個並べたもの $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の全体の集合を S_n とおく。 S_n の要素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対し、次の 2 つの条件を考える。

- 条件 C_{12} : $1 \leq i < j \leq n$ である整数 i, j の組で、 $x_i = 1$ 、 $x_j = 2$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。
- 条件 C_{123} : $1 \leq i < j < k \leq n$ である整数 i, j, k の組で、 $x_i = 1$ 、 $x_j = 2$ 、 $x_k = 3$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

例えば、 S_4 の要素 $(3, 1, 2, 2)$ は条件 C_{12} を満たすが、条件 C_{123} は満たさない。

S_n の要素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ のうち、条件 C_{12} を満たさないものの個数を $f(n)$ 、条件 C_{123} を満たさないものの個数を $g(n)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $f(4)$ と $g(4)$ を求めよ。
- (2) $f(n)$ を n を用いて表せ。
- (3) $g(n+1)$ を $g(n)$ と $f(n)$ を用いて表せ。
- (4) $g(n)$ を n を用いて表せ。

2

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し、 xyz 空間内の 4 点

$$\begin{aligned} &A(\cos \theta, \cos \theta, \sin \theta), \quad B(-\cos \theta, -\cos \theta, \sin \theta), \\ &C(\cos \theta, -\cos \theta, -\sin \theta), \quad D(-\cos \theta, \cos \theta, -\sin \theta) \end{aligned}$$

を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$ 、この四面体の xz 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $S\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 、 $V\left(\frac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ。
- (2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ。
- (3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ。

3

a を正の実数、 k を自然数とし、 $x > 0$ で定義される関数

$$f(x) = \int_a^x \frac{k + \sqrt[k]{u}}{ku} du$$

を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の増減および凹凸を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) S を正の実数とすると、 $f(p) = S$ を満たす実数 p がただ 1 つ存在することを示せ。
- (3) $b = \frac{k}{k + \sqrt[k]{a}}$ とおくと、(2) の S 、 p について、次の不等式が成立することを示せ。

$$1 + bS < p < e^{bS}$$