

1

(60 点)

3 以上の奇数 n に対して, a_n と b_n を次のように定める。

$$a_n = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)k(k+1), \quad b_n = \frac{n^2-1}{8}$$

(1) a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ。

(2) $a_n - b_n$ は 4 の倍数であることを示せ。

2

(60 点)

$a > 1$ とし，次の不等式を考える。

$$\frac{e^t - 1}{t} \geq e^{\frac{t}{a}}$$

- (1) $a = 2$ のとき，すべての $t > 0$ に対して上の不等式が成り立つことを示せ。
- (2) すべての $t > 0$ に対して上の不等式が成り立つような a の範囲を求めよ。

3

(60 点)

1 個のさいころを投げて、出た目が 1 か 2 であれば行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を、出た目が 3 か 4 であれば行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を、出た目が 5 か 6 であれば行列

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶ。そして、選んだ行列の表す 1 次変換によって xy 平面上の点 R を移すという操作を行う。点 R は最初は点 $(0,1)$ にあるものとし、さいころを投げて点 R を移す操作を n 回続けて行ったときに点 R が点 $(0,1)$ にある確率を p_n 、点 $(0,-1)$ にある確率を q_n とする。

- (1) p_1, p_2 と q_1, q_2 を求めよ。
- (2) $p_n + q_n$ と $p_{n-1} + q_{n-1}$ の関係式を求めよ。また、 $p_n - q_n$ と $p_{n-1} - q_{n-1}$ の関係式を求めよ。
- (3) p_n を n を用いて表せ。

4

(60 点)

点 $P(t, s)$ が $s = \sqrt{2} t^2 - 2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに、点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに、曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

- (1) 点 $Q(x, y)$ の座標を、 t を用いて表せ。
- (2) 直線 $y = a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ。
- (3) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

5

(60 点)

xy 平面上的曲線 $C: y = x^3 + x^2 + 1$ を考え, C 上の点 $(1, 3)$ を P_0 とする。
 $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 点 $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ における C の接線と C の交点
のうちで P_{k-1} と異なる点を $P_k(x_k, y_k)$ とする。このとき, P_{k-1} と P_k を結
ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする。

(1) S_1 を求めよ。

(2) x_k を k を用いて表せ。

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{S_k}$ を求めよ。