

1

n を自然数、 m を $2n$ 以下の自然数とする。1 から n までの自然数が 1 つずつ記されたカードが、それぞれの数に対して 2 枚ずつ、合計 $2n$ 枚ある。この中から、 m 枚のカードを無作為に選んだとき、それらに記された数がすべて異なる確率を $P_n(m)$ と表す。ただし $P_n(1) = 1$ とする。さらに、 $E_n(m) = mP_n(m)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $P_3(2), P_3(3), P_3(4)$ を求めよ。
- (2) $E_{10}(m)$ が最大となるような m を求めよ。
- (3) 自然数 n に対し、 $E_n(m) > E_n(m+1)$ を満たす自然数 m の最小値を $f(n)$ とするとき、 $f(n)$ を n を用いて表せ。ただし、ガウス記号 $[]$ を用いてよい。ここで、実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を $[x]$ と表す。

2

実数 a, b に対し、 $f(x) = x^3 - 3ax + b$ とおく。 $-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $a > 0$ のとき、 $f(x)$ の極値を a, b を用いて表せ。
- (2) $b \geq 0$ のとき、 M を a, b を用いて表せ。
- (3) a, b が実数全体を動くとき、 M のとりうる値の範囲を求めよ。

3

座標平面上で次のように媒介変数表示される曲線 C を考える。

$$\begin{cases} x = |\cos t| \cos^3 t \\ y = |\sin t| \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の条件 (＊) を満たす第 1 象限内の定点 F の座標を求めよ。

(＊) 第 1 象限内で C 上にあるすべての点 P について、 P から直線

$x + y = 0$ に下ろした垂線を PH とするとき、つねに $PF = PH$ となる。

(2) 点 P が C 全体を動くとき、 P と (1) の定点 F を結ぶ線分 PF が通過する領域を図示し、その面積を求めよ。

(3) (2) の領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。