

1

(60 点)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) すべての n に対して、不等式 $b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

2

(60 点)

四面体 $OABC$ において, $OA = OB = OC = BC = 1$, $AB = AC = x$ とする。頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし, 平面 ABC との交点を H とする。頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし, 平面 OBC との交点を H' とする。

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし, $\overrightarrow{OH} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$, $\overrightarrow{AH'} = s\vec{b} + t\vec{c}$ と表す。このとき, p, q, r および s, t を x の式で表せ。

(2) 四面体 $OABC$ の体積 V を x の式で表せ。また, x が変化するときの V の最大値を求めよ。

3

(60 点)

$a > 0$ とする。曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸、 y 軸、および直線 $x = a$ で囲まれた図形を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。

(1) A の体積 V を求めよ。

(2) 点 $(t, 0)$ ($-a \leq t \leq a$) を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき、不等式

$$S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds$$

を示せ。

(3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

を示せ。

4

(60 点)

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t ($t > 0$) における座標 (x, y) が

$$x = t^2 \cos t, \quad y = t^2 \sin t$$

で表されている。原点を O とし、時刻 t における P の速度ベクトルを v とする。

- (1) OP と v のなす角を $\theta(t)$ とするとき、極限值 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$ を求めよ。
- (2) v が y 軸に平行になるような t ($t > 0$) のうち、最も小さいものを t_1 、次に小さいものを t_2 とする。このとき、不等式 $t_2 - t_1 < \pi$ を示せ。

5

(60 点)

n を相異なる素数 $p_1, p_2, \dots, p_k$ ($k \geq 1$) の積とする。 a, b を n の約数とするとき、 a, b の最大公約数を G 、最小公倍数を L とし、

$$f(a, b) = \frac{L}{G}$$

とする。

- (1) $f(a, b)$ が n の約数であることを示せ。
- (2) $f(a, b) = b$ ならば、 $a = 1$ であることを示せ。
- (3) m を自然数とすると、 m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする。 $S(f(a, b)) + S(a) + S(b)$ が偶数であることを示せ。