

1

自然数 n に対して、 n のすべての正の約数 (1 と n を含む) の和を $S(n)$ とおく。例えば、 $S(9) = 1 + 3 + 9 = 13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) n が異なる素数 p と q によって $n = p^2q$ と表されるとき、 $S(n) = 2n$ を満たす n をすべて求めよ。

(2) a を自然数とする。 $n = 2a - 1$ が $S(n) = n + 1$ を満たすとき、 a は素数であることを示せ。

(3) a を 2 以上の自然数とする。 $n = 2^{a-1}(2a - 1)$ が $S(n) \leq 2n$ を満たすとき、 n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。

2 xyz 空間において、不等式

$$|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$$

の表す領域を Q とし、正の実数 r に対して $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ の表す領域を S とする。また、 Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を R とし、 R の体積を $V(r)$ とする。さらに $x \geq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_x 、 $y \geq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_y 、 $z \geq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_z とし、 $S_x \neq \emptyset$ を満たす r の最小値を r_1 、 $S_x \cap S_y \neq \emptyset$ を満たす r の最小値を r_2 、 $S_x \cap S_y \cap S_z \neq \emptyset$ を満たす r の最小値を r_3 とする。ただし、 $\emptyset$ は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $r = \frac{\sqrt{10}}{3}$ のとき、 R の xy 平面による断面を図示せよ。
- (2) r_1, r_2, r_3 および $V(r_1), V(r_3)$ を求めよ。
- (3) $r \geq r_1$ のとき、 S_x の体積を r を用いて表せ。
- (4) $0 < r \leq r_2$ において、 $V(r)$ が最小となる r の値を求めよ。

3

関数 $f(x) = (x-2)\langle x-1 \rangle + \langle x-2 \rangle$ を考える。ここで、実数 u に対して

$$\langle u \rangle = \frac{u + |u|}{2}$$

とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $g(x) = \int_0^1 f(x-t)dt$ とおくとき、 $g(x)$ の最大値を求めよ。

(3) (2) の $g(x)$ に対して、 $p(s) = \int_0^3 (x-s)^2 g(x)dx$ とおくとき、 $p(s)$ の最小値を求めよ。