

1

0以上の整数 x, y に対して、 $R(x, y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy = 0 \text{ のとき、} R(x, y) = 0 \\ xy \neq 0 \text{ のとき、} x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x, y) \text{ とする。} \end{cases}$$

正の整数 a, b に対して、数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$r_1 = R(a, b), \quad r_2 = R(b, r_1),$$

$$r_{n+1} = R(r_{n-1}, r_n) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

また、 $r_n = 0$ となる最小の n を N で表す。例えば $a = 7, b = 5$ のとき $N = 3$ である。

次に、数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $a = f_{102}, b = f_{100}$ のとき、 N を求めよ。
- (2) 正の整数 a, b について、 a が b で割り切れないとき、 $r_1 \geq f_N$ が成立することを示せ。
- (3) 2以上の整数 n について、 $10f_n < f_{n+5}$ が成立することを示せ。
- (4) 正の整数 a, b について、 a が b で割り切れないとき、

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{r_k} < \frac{259}{108}$$

が成立することを示せ。

2

xyz 空間において、連立不等式 $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$ の表す領域を Q とし、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 r の球面を S_0 とする。さらに、点 $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, -1)$, $C(-1, 1, -1)$, $D(-1, -1, 1)$ を中心とし、 S_0 に外接する球面を、それぞれ S_A, S_B, S_C, S_D とする。このとき以下の各問いに答えよ。ここで、「球面 I が球面 V に外接する」とは、 I と V が互いにその外部にあって、1 点を共有することである。

- (1) S_A と S_B が共有点を持つとき、 r の最大値 r_1 を求めよ。
- (2) S_0, S_A, S_B, S_C, S_D およびそれらの内部の領域の和集合と、 Q との共通部分の体積を $V(r)$ とする。区間 $r_1 \leq r \leq 1$ において、 $V(r)$ が最小となる r の値 r_2 を求めよ。ここで r_1 は (1) で求めた値とする。
- (3) S_0 と共有点を持つどんな平面も、 S_A, S_B, S_C, S_D のいずれかと共有点を持つとき、 r の最大値 r_3 を求めよ。

3

関数 $f(x) = x - \log(1+x)$ について、以下の各問いに答えよ。ここで $\log$ は自然対数を表す。また $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。

(1) p を実数とするとき、 $f(x) = p$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

以下、 $f(x)$ の定義域を $x \geq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2) u を正の実数とする。 $p \geq 0$ のとき、

$$p \leq g(p) \leq \frac{u+1}{u} \{p - u + \log(u+1)\} + u$$

を示せ。

(3) p を正の実数とし、 xy 平面において、曲線 $y = g(x)$ と直線 $x = p$ の交点を通り、直線 $y = x$ に平行な直線を ℓ とする。また、 ℓ と x 軸および曲線 $y = g(x)$ によって囲まれた図形の面積を S とする。このとき、 S を p を用いて表せ。