

1

(60 点)

a, b, c を実数とし, 3 つの 2 次方程式

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 + bx + 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x^2 + cx + 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の解を複素数平面上で考察する。

- (1) 2 つの方程式 ①、② がいずれも実数解を持たないとき, それらの解はすべて同一円周上にあるか, またはすべて同一直線上にあることを示せ。
また, それらの解がすべて同一円周上にあるとき, その円の中心と半径を a, b を用いて表せ。
- (2) 3 つの方程式 ①、②、③ がいずれも実数解を持たず, かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a, b, c を用いて表せ。

2

(60 点)

次の間に答えよ。

(1) $35x + 91y + 65z = 3$ を満たす整数の組 (x, y, z) を一組求めよ。

(2) $35x + 91y + 65z = 3$ を満たす整数の組 (x, y, z) の中で $x^2 + y^2$ の値が
最小となるもの、およびその最小値を求めよ。

3

(60 点)

方程式

$$e^x(1 - \sin x) = 1$$

について、次の問に答えよ。

(1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ。また、正の実数解を無限個持つことを示せ。

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて $a_1, a_2, a_3, \dots$ とし、

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

とおく。このとき極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$$

を求めよ。

4

(60 点)

xyz 空間内において, 連立不等式

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad |z| \leq 6$$

により定まる領域を V とし, 2 点 $(2, 0, 2), (-2, 0, -2)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) $|t| \leq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し, 点 $P_t \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 0, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする。また, 実数 θ に対し, 点 $(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする。 L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ。

(2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える。このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ。

5

(60 点)

 xyz 空間内の一辺の長さが 1 の立方体

$$\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

を Q とする。点 X は頂点 $A(0, 0, 0)$ から出発して Q の辺上を 1 秒ごとに長さ 1 だけ進んで隣の頂点に移動する。 X が x 軸、 y 軸、 z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p, q, r である。ただし

$$p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0, \quad p + q + r = 1$$

である。 X が n 秒後に頂点 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 0, 1)$, $D(0, 1, 1)$ にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とする。

- (1) a_{n+2} を a_n, b_n, c_n, d_n と p, q, r を用いて表せ。
- (2) $a_n - b_n + c_n - d_n$ を p, q, r, n を用いて表せ。
- (3) a_n を p, q, r, n を用いて表せ。