

|   |
|---|
| 1 |
|---|

(60 点)

- (1)  $h > 0$  とする。座標平面上の点  $O(0, 0)$ , 点  $P(h, s)$ , 点  $Q(h, t)$  に対して, 三角形  $OPQ$  の面積を  $S$  とする。ただし,  $s < t$  とする。三角形  $OPQ$  の辺  $OP, OQ, PQ$  の長さをそれぞれ  $p, q, r$  とするとき, 不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ。また, 等号が成立するときの  $s, t$  の値を求めよ。

- (2) 四面体  $ABCD$  の表面積を  $T$ , 辺  $BC, CA, AB$  の長さをそれぞれ  $a, b, c$  とし, 辺  $AD, BD, CD$  の長さをそれぞれ  $l, m, n$  とする。このとき, 不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ。また, 等号が成立するのは四面体  $ABCD$  がどのような四面体のときか答えよ。

**2**

(60 点)

次の等式が  $1 \leq x \leq 2$  で成り立つような関数  $f(x)$  と定数  $A, B$  を求めよ。

$$\int_1^x |\log y| f(xy) dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし,  $f(x)$  は  $1 \leq x \leq 2$  に対して定義される連続関数とする。

**3**

(60 点)

$i$  を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数  $z$  により  $\frac{z}{3+2i}$  と表される複素数全体の集合を  $M$  とする．

- (1) 原点を中心とする半径  $r$  の円上またはその内部に含まれる  $M$  の要素の個数を  $N(r)$  とする．このとき，集合  $\{r \mid 10 \leq N(r) < 25\}$  を求めよ．
- (2) 複素数平面の相異なる 2 点  $z, w$  を結ぶ線分を  $L(z, w)$  で表すとき，6 つの線分  $L(0, 1), L\left(1, 1 + \frac{i}{2}\right), L\left(1 + \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\right), L\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1}{2} + i\right), L\left(\frac{1}{2} + i, i\right), L(i, 0)$  で囲まれる領域の内部または境界に含まれる  $M$  の要素の個数を求めよ．

4

(60 点)

$H_1, \dots, H_n$  を空間内の相異なる  $n$  枚の平面とする。 $H_1, \dots, H_n$  によって空間が  $T(H_1, \dots, H_n)$  個の空間領域に分割されるとする。例えば、空間の座標を  $(x, y, z)$  とするとき。

- 平面  $x = 0$  を  $H_1$ , 平面  $y = 0$  を  $H_2$ , 平面  $z = 0$  を  $H_3$  とすると  
 $T(H_1, H_2, H_3) = 8$ ,
- 平面  $x = 0$  を  $H_1$ , 平面  $y = 0$  を  $H_2$ , 平面  $x + y = 1$  を  $H_3$  とすると  
 $T(H_1, H_2, H_3) = 7$ ,
- 平面  $x = 0$  を  $H_1$ , 平面  $x = 1$  を  $H_2$ , 平面  $y = 0$  を  $H_3$  とすると  
 $T(H_1, H_2, H_3) = 6$ ,
- 平面  $x = 0$  を  $H_1$ , 平面  $y = 0$  を  $H_2$ , 平面  $z = 0$  を  $H_3$ , 平面  $x + y + z = 1$  を  $H_4$  とすると  $T(H_1, H_2, H_3, H_4) = 15$ ,

である。

- (1) 各  $n$  に対して  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ。
- (2) 各  $n$  に対して  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ。ただし  $n \geq 2$  とする。
- (3) 各  $n$  に対して  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ。ただし  $n \geq 3$  とする。

**5**

(60 点)

 $a = \frac{2^8}{3^4}$  として, 数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。

- (1) 関数  $f(x) = (x+1) \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$  は  $x > 0$  で減少することを示せ。
- (2) 数列  $\{b_k\}$  の項の最大値  $M$  を既約分数で表し,  $b_k = M$  となる  $k$  をすべて求めよ。