

1

n を自然数とする。整数 i, j に対し、 xy 平面上の点 $P_{i,j}$ の座標を

$$\left(\cos \frac{2\pi}{n} i + \cos \frac{2\pi}{n} j, \sin \frac{2\pi}{n} i + \sin \frac{2\pi}{n} j \right)$$

で与える。さらに、 i, j を動かしたとき、 $P_{i,j}$ の取り得る異なる座標の個数を S_n とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

- (1) $n = 3$ のとき、 $\triangle P_{0,0}P_{0,1}P_{0,2}$ および $\triangle P_{1,1}P_{1,2}P_{1,0}$ を同一座標平面上に図示せよ。
- (2) S_4 を求めよ。
- (3) 平面上の異なる 2 点 A, B に対して、 $AQ = BQ = 1$ であるような同一平面上の点 Q はいくつあるか。 $AB = d$ の値で場合分けして答えよ。
- (4) S_n を n を用いて表せ。

2

xy 平面上の放物線 $P: y^2 = 4x$ 上に異なる 2 点 A, B をとり、 A, B それぞれにおいて P への接線と直交する直線を n_A, n_B とする。 a を正の数として、点 A の座標を $(a, \sqrt{4a})$ とするとき、以下の各問いに答えよ。

- (1) n_A の方程式を a を用いて表せ。
- (2) 直線 AB と直線 $y = \sqrt{4a}$ とがなす角の 2 等分線のひとつが、 n_A に一致するとき、直線 AB の方程式を a を用いて表せ。
- (3) (2) のとき、点 B を通る直線 r_B を考える。 r_B と直線 AB とがなす角の 2 等分線のひとつが、 n_B に一致するとき、 r_B の方程式を a を用いて表せ。
- (4) (3) のとき、直線 AB と放物線 P で囲まれた図形の面積を S_1 とし、 P と直線 $y = \sqrt{4a}$ 、直線 $x = -1$ および (3) の r_B で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 a を変化させたとき、 $\frac{S_1}{S_2}$ の最大値を求めよ。

3

曲線 $C: y = f(x)$ ($0 \leq x < 1$) が次の条件を満たすとする。

- $f(0) = 0$
- $0 < x < 1$ のとき $f'(x) > 0$
- $0 < a < 1$ を満たすすべての実数 a について、曲線 C 上の点 $P(a, f(a))$ における接線と直線 $x = 1$ との交点を Q とするとき、 $PQ = 1$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)f'(x)dx$ の値を求めよ。
- (3) 曲線 C と x 軸、直線 $x = 1$ 、直線 $y = f\left(\frac{1}{2}\right)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。