$\boxed{\mathbf{1}}$ (60 点)

a, b を実数とし，$f(z) = z^2 + az + b$ とする。a, b が

$$|a| \leqq 1, \quad |b| \leqq 1$$

を満たしながら動くとき，$f(z) = 0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ (60 点)

3 つの正の整数 a , b , c の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ.

(1) $a+b+c$, $bc+ca+ab$, abc の最大公約数は 1 であることを示せ.

(2) $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (60 点)

α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\angle A = \alpha$ および $\angle P = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件 (a), (b) を満たしながら，時刻 $t = 0$ から時刻 $t = \dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする．

(a) 時刻 t での点 A, B の座標は，それぞれ $A(\sin t, 0)$，$B(0, \cos t)$ である．

(b) 点 P は第一象限内にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ．

(2) 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = \dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ．

(3) xy 平面内において，連立不等式

$$x^2 - x + y^2 < 0, \quad x^2 + y^2 - y < 0$$

により定まる領域を D とする．このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (60 点)

a は正の実数とする。複素数 z が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w=\dfrac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) K が円となるための a の条件を求めよ。また，そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ。

(2) a が (1) の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ (60 点)

a は $0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数とし，$f(x) = \dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - ax\right)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の等式 (*) を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ．

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

(2) $0 \leqq b < c \leqq 1$ を満たす実数 b, c について，不等式

$$f(b)(c-b) \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の試行を考える．

試行 n 個の数 $1, 2, \ldots, n$ を出目とする．あるルーレットを k 回まわす．

この [試行] において，各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$$

が成り立つとする．このとき，(1) の等式 (*) が成り立つことを示せ．

(4) (3) の [試行] において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし，$A_n = \lim\limits_{k\to\infty} A_{n,k}$ とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} = \frac{1}{2}$$

が成り立つとき，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ．